

Να βρεθεί το στοιχείο gf^2gf^3gf στην D_5

ΛΥΣΗ

στροφή f κατά $\frac{2\pi}{5}$ και συμμετρία g ως προς
τις κορυφές 1

$D_5 = \{e, f, f^2, f^3, f^4, g, fg, f^2g, f^3g, f^4g\}$ 10 στοιχεία

$$f := (1, 2, 3, 4, 5) \text{ και } g := (2, 5)(3, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f \downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$$

$$f^3 = (1, 4, 2, 5, 3)$$

$$f^2 = (1, 3, 5, 2, 4)$$

$$g \downarrow \begin{matrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{matrix}$$

$$f^3 \downarrow \begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{matrix}$$

$$g \downarrow \begin{matrix} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$$

$$f^2 \downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \rightarrow f^2gf^3gf = e = f^4 = g^2$$

$$g \downarrow \begin{matrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{matrix}$$

$$\text{Άρα, } g(f^2gf^3gf) = g \cdot e = g$$

$$\text{Παρατηρούμε επίσης ότι } gf^3g = f^{-3}$$

$$\text{Άρα } g(f^2 \cdot f^{-3}f) = g \cdot e = g, \text{ (πιο άμεσα)}$$